Teorema

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente è che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Si avverte però che tale condizione non è affatto sufficiente in quanto esistono delle serie che non sono convergenti pur essendo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; ci permette però di stabilire se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie diverge.

Esempio

Sia $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3}$, stabilire se tale serie è convergente.

Calcoliamoci il limite del termine generale della serie data.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1 \neq 0$$

Essendo il limite diverso da zero, per il teorema precedente, possiamo dire che la serie diverge.

Difatti, costituisce un controesempio del teorema la serie armonica.

Consideriamo la ***serie armonica***

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.. + \frac{1}{n} + \ldots$$

e calciamoci il limite del termine generale:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Tale limite è nullo, eppure la serie armonica non converge.

A tal scopo, andiamo a valutare $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Ricordiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e dunque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Passando al logaritmo si ha:

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1;$$

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1;$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Allora

$$\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+..........+\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+........\frac{1}{n}}_{s_n}$$

Sfruttando le proprietà dei logaritmi si ha:

$$\log 2+\log 3-\log 2+\log 4-\log 3+..........+\log(n+1) < s_n;$$

cioè

$$\log(n+1) < s_n$$

Passando al limite

$$\lim_{n\to\infty}\log(n+1) < \lim_{n\to\infty} s_n$$

ma

$$\lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty .$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} s_n > \infty$$

E' così provato che <u>la serie armonica</u> $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ <u>è divergente</u> pur essendo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$